1. Понятия «модель», «моделирование». Функции и типовые цели моделирования. Разработка моделей систем на основе классического и системного подходов.

Моделирование (в широком смысле) – основной метод исследований во всех областях знаний и научно обоснованный метод оценок характеристик сложных систем, используемый для принятия решений в различных сферах инженерной деятельности.

Моделью (лат. modulus – мера) называется объект-заместитель, который в определенных условиях может заменять объект-оригинал, воспроизводя интересующие исследователя свойства оригинала.

Замещение одного объекта другим с целью получения информации о важнейших свойствах объекта-оригинала с помощью объекта-модели называется моделированием.

Моделирование – процесс исследования реальной системы, включающий

* построение модели,
* изучение свойств модели,
* перенос полученных сведений на моделируемую систему.

Функции моделирования – описание, объяснение и прогнозирование поведения реальной системы.

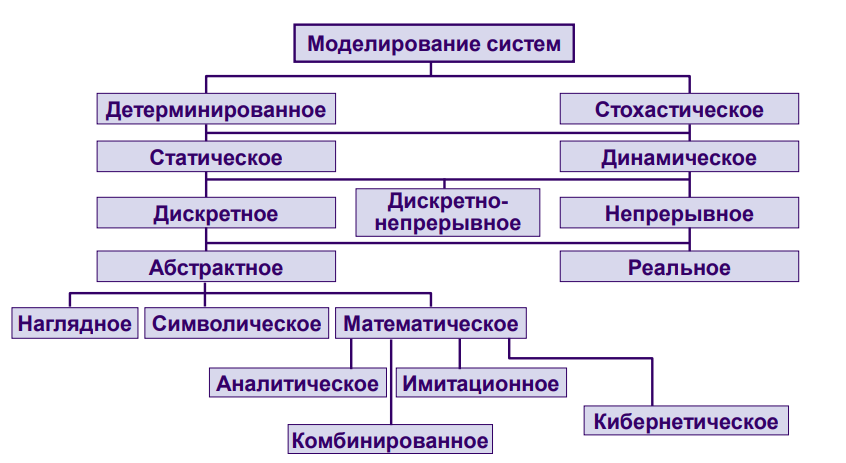
Типовые цели моделирования:

* поиск оптимальных или близких к оптимальным решений,
* оценка эффективности решений,
* определение свойств системы (чувствительности к изменению значений характеристик и др.),
* установление взаимосвязей между характеристиками системы, и др.

Классический (индуктивный) подход рассматривает систему путем перехода от частного к общему; синтезирует (конструирует) систему путем слияния ее компонент, разрабатываемых раздельно.

Системный подход предполагает последовательный переход от общего к частному: в основе рассмотрения лежит цель; исследуемый объект выделяется из окружающей среды.

1. Классификация видов моделирования систем по различным признакам.



1. **Характер изучаемых процессов:**
   1. Детерминированное: отображает детерминированные процессы (предполагается отсутствие случайных воздействий)
   2. Стохастическое: отображает вероятностные процессы и события (анализируется ряд реализаций случайного процесса и оцениваются средние характеристики).
2. **Зависимость характеристик модели от времени:**
   1. Статическое: характеристики модели не зависят от времени.
   2. Динамическое: характеристики модели зависят от времени. Динамическая модель отражает поведение объекта во времени.
3. **Тип значений параметров модели:**
   1. Дискретное: для описания систем, изменение состояния которых происходит не непрерывно, а в дискретные моменты времени, по принципу «от события к событию».
   2. Непрерывное: для описания непрерывных процессов в системах.
   3. Дискретно-непрерывное.
4. **Средства построения модели:**
   1. материальные (реальные): материал для построения – средства окружающего материального мира
   2. абстрактные (идеальные): Конструкции, построенные средствами сознания, мышления.
      1. Наглядное моделирование – это воспроизведение существенных свойств изучаемого объекта, создание его заместителя и работа с ним.
      2. Символическое моделирование: представляет собой искусственный процесс создания логического объекта, который замещает реальный и выражает основные свойства его отношений с помощью определенной системы знаков или символов.
      3. Математическое моделирование: процесс установления соответствия данному реальному объекту некоторого математического объекта, называемого математической моделью, и исследование этой модели, позволяющее получать характеристики рассматриваемого реального объекта.
         1. Аналитическая форма: запись модели в виде результата решения исходных уравнений модели. Может представлять собой явные выражения выходных переменных как функций входов и переменных состояния. Моделируется только функциональный аспект системы.
         2. Имитационная: воспроизводится алгоритм функционирования системы во времени; имитируются элементарные явления, составляющие процесс, с сохранением их логической структуры и последовательности. Основное преимущество по сравнению с аналитическим моделированием – возможность решения более сложных задач.
         3. Комбинированное: Объединение достоинств аналитического и имитационного моделирования: предварительная декомпозиция процесса функционирования объекта на составляющие подпроцессы; для тех подпроцессов, где это возможно, – использование аналитических моделей, для остальных – построение имитационных моделей.
         4. Кибернетическое - отсутствует непосредственное подобие физических процессов, происходящих в моделях, реальным процессам. Отображается лишь некоторая функция: реальный объект – как «черный ящик», имеющий ряд входов и выходов; моделируются некоторые связи между выходами и входами. Чаще всего проводится анализ поведенческой стороны объекта при различных воздействиях внешней среды.
5. Основные этапы построения математической модели (краткая характеристика).
6. **Содержательное описание моделируемого объекта**

Исходя из цели исследования устанавливаются

* + - совокупность элементов,
    - взаимосвязи между элементами,
    - возможные состояния каждого элемента,
    - существенные характеристики состояний и соотношения между ними.

В этом словесном описании возможны логические противоречия, неопределенности. Такое предварительное представление системы называется концептуальной моделью. На данном этапе применяются качественные методы описания систем, знаковые и языковые модели.

1. **Формализация**

На основе содержательного описания определяется исходное множество характеристик системы.

* + - После исключения несущественных характеристик выделяются управляемые и неуправляемые параметры и производится символизация.
    - Определяется система ограничений на значения управляемых параметров.
    - Если ограничения не носят принципиальный характер, то ими пренебрегают.
    - Формируются критерий эффективности и целевая функция модели.

1. **Проверка адекватности модели**
   1. Предварительная проверка по основным аспектам (выявление грубых ошибок).
      * Все ли существенные параметры включены в модель?
      * Нет ли в модели несущественных параметров?
      * Правильно ли отражены функциональные связи между параметрами?
      * Правильно ли определены ограничения на значения параметров?

**б.** Реализация модели и проведение исследований: анализ результатов моделирования на соответствие известным свойствам исследуемого объекта.

Установление соответствия модели оригиналу:

* + - Сравнение результатов моделирования с отдельными экспериментальными результатами, полученными при одинаковых условиях. Нет ли в модели несущественных параметров?
    - Использование других моделей.
    - Сопоставление структуры и функционирования модели с прототипом?

1. **Корректировка модели**

Возможно уточнение

* существенных параметров,
* ограничений на значения управляемых параметров,
* показателей исхода операции,
* связи показателей исхода операции с существенными параметрами,
* критерия эффективности.

После внесения изменений – снова оценка адекватности.

1. **Оптимизация модели**

Суть – в упрощении модели при заданном уровне адекватности.

Основные показатели, по которым выполняется оптимизация, – время и затраты средств для проведения исследований на модели.

В основе – преобразование моделей из одной формы в другую. С использованием

1. Формальная модель объекта. Закон функционирования системы, способы его задания. Алгоритм функционирования. Статические и динамические модели.

Формальная модель: модель системы S можно представить в виде множества величин, описывающих процесс функционирования реальной системы:

* Совокупность **входных воздействий** на систему
* Совокупность **воздействий внешней среды**
* Совокупность **внутренних (собственных)** параметров системы
* Совокупность **выходных** характеристик системы

В общем случае подмножества X, V, H и Y

* не пересекаются;
* содержат как детерминированные, так и стохастические составляющие;
* включают управляемые и неуправляемые переменные.

При моделировании систем: входные воздействия, воздействия внешней среды, внутренние параметры системы - независимые (экзогенные) переменные. Выходные характеристики системы – зависимые (эндогенные) переменные.

Процесс функционирования системы S описывается во времени оператором FS (преобразует экзогенные переменные в эндогенные) в соответствии с соотношениями вида , где

Эта зависимость называется законом функционирования системы S. Он может быть задан в виде: функции, функционала, логических условий, алгоритма, таблицы, словесной формы

Алгоритм функционирования – метод получения выходных характеристик с учетом входных воздействий , воздействий внешней среды и собственных параметров системы .

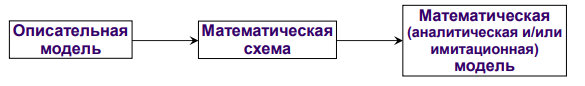
Динамические модели (сиcтемы) – математические модели типа (\*). Являются описанием объекта во времени.

Статические модели описываются соотношениями вида .

Состояния системы - множество значений характеристик системы S в конкретные моменты. Описывается вектором

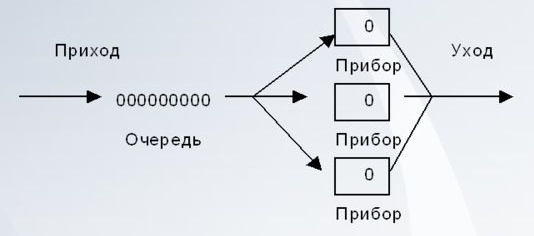
1. Математическая схема как звено при переходе от содержательной к формальной модели объекта. Примеры математических схем.

Математическая схема – звено при переходе от содержательного к формальному описанию процесса функционирования системы с учетом воздействия внешней среды.



Типовые схемы:

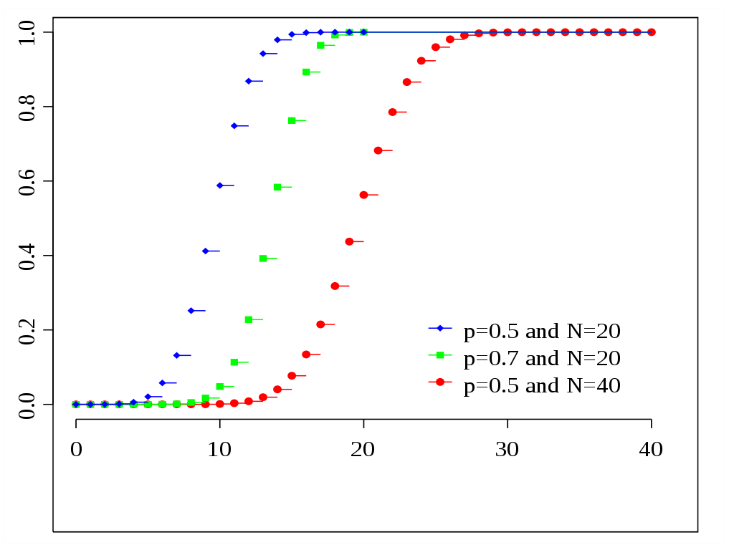
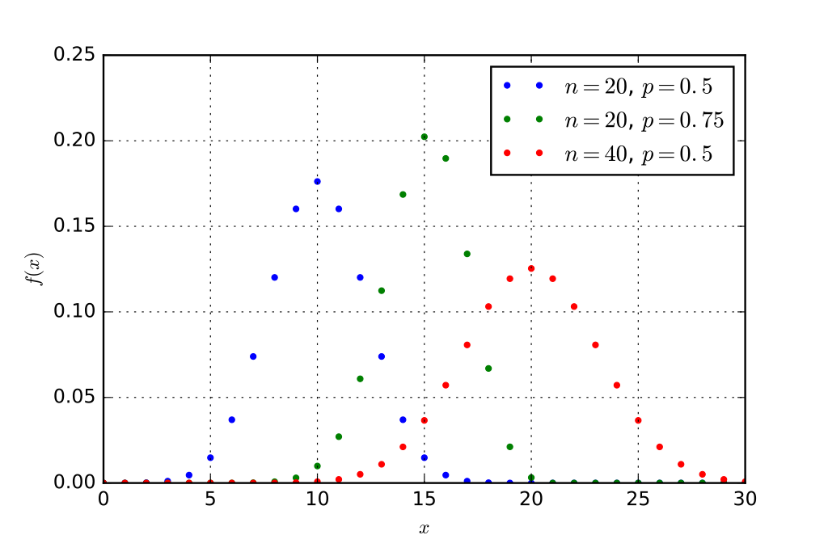
* непрерывно-детерминированный (например, дифференциальные уравнения);
* дискретно-детерминированный (конечные автоматы);
* дискретно-стохастический (вероятностные автоматы);
* непрерывно-стохастический (системы массового обслуживания);
* обобщенный или универсальный (агрегативные системы).

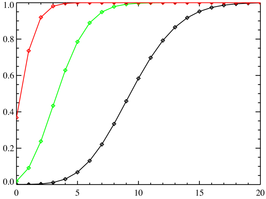
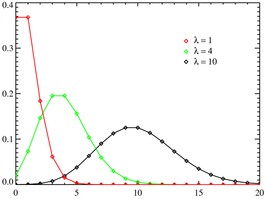
**

1. Закон распределения дискретной случайной величины. Законы распределения: биномиальный, Пуассона, геометрический (определение, условия возникновения, основные числовые характеристики).

Закон распределения дискретной случайной величины - это соответствие между возможными значениями этой величины и их вероятностями.

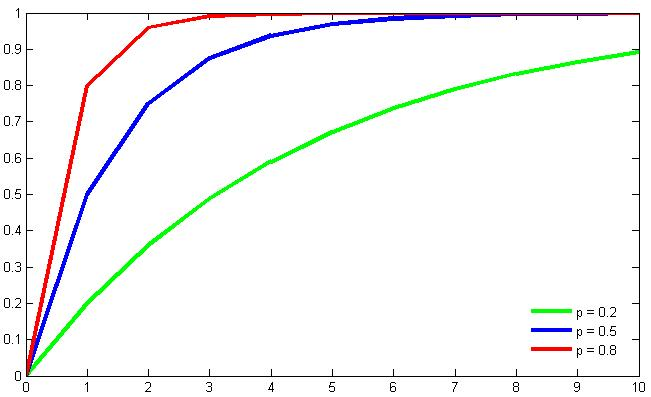
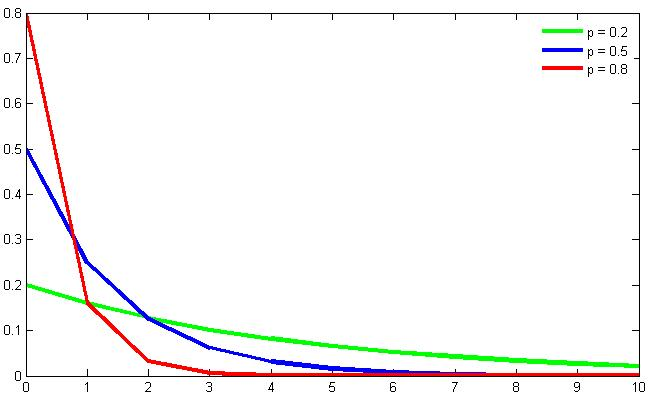
**Биноминальное распределение**  - распределение количества успехов в последовательности из n независимых случайных экспериментов, таких, что вероятность успеха в каждом из них постоянна и равна p., **мода** = (n+1)p, **медиана** = одно из {np -1, np, np+1}



**Распределение Пуассона** — вероятностное распределение дискретного типа, моделирует случайную величину, представляющую собой число событий, произошедших за фиксированное время, при условии, что данные события происходят с некоторой фиксированной средней интенсивностью и независимо друг от друга. Оно играет ключевую роль в теории массового обслуживания. 

Под **геометрическим распределением (Geom(p))** в теории вероятностей подразумевается одно из двух распределений ДСВ:

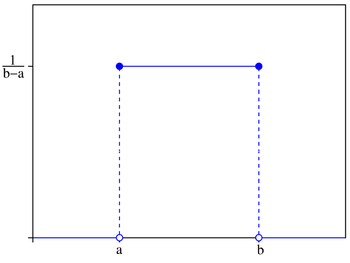
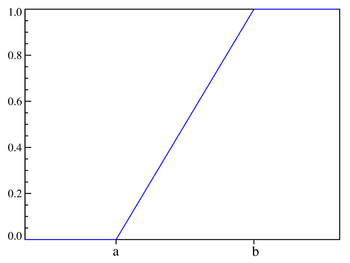
* распределение вероятностей случайной величины X равной номеру первого «успеха» в серии испытаний Бернулли и принимающей значения n=1, 2, 3, ...;(1) , **мода** = 1
* распределение вероятностей случайной величины Y=X-1 равной количеству «неудач» до первого «успеха» и принимающей значения n=0,1,2, … . (2),**мода** = 0



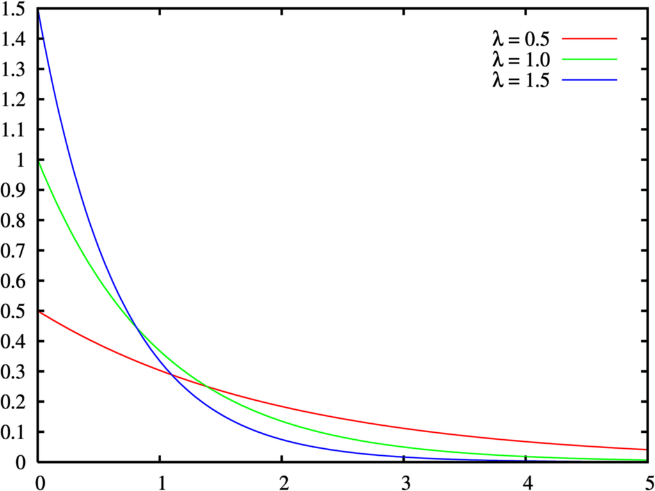
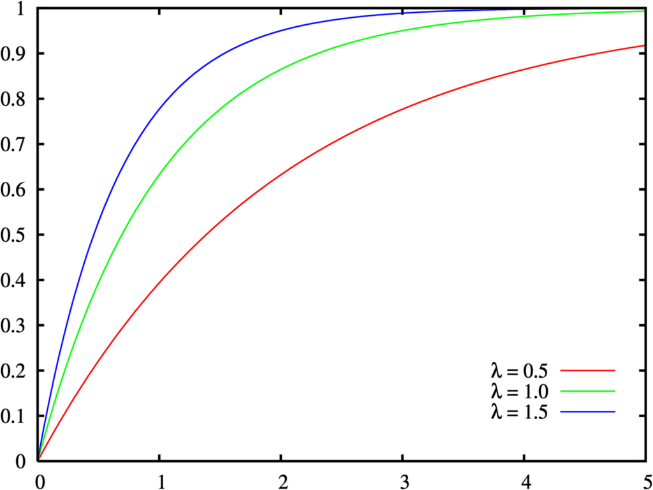
Распределение Бернулли в теории вероятностей и математической статистике — дискретное распределение вероятностей, моделирующее случайный эксперимент произвольной природы, при заранее известной вероятности успеха или неудачи.

1. Формы закона распределения непрерывных случайных величин. Законы распределения: равномерный, показательный, нормальный (определение, основные числовые характеристики, вероятность попадания случайной величины в заданный интервал). Условия возникновения показательного, нормального распределения.

**Равномерное распределение U(a,b)**— распределение случайной вещественной величины, принимающей значения, принадлежащие некоторому промежутку конечной длины, характеризующееся тем, что плотность вероятности на этом промежутке почти всюду постоянна. Говорят, что случайная величина имеет непрерывное равномерное распределение на отрезке [a, b], где a, b ϵ R, если её плотность имеет вид: . **M(x)** = , **вероятность** **попадания**:

**Показательное (или экспоненциальное) распределение** — абсолютно непрерывное распределение, моделирующее время между двумя последовательными свершениями одного и того же события. СВ X имеет показательное распределение с параметром λ>0, если ее плотность имеет **вид**, M(x) = , **Disp** = , **мода** = 0, **медиана** , **вероятность попадания в интервал:**

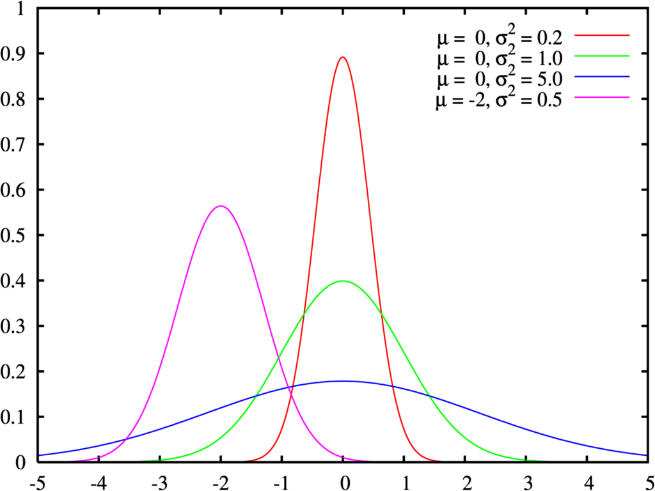
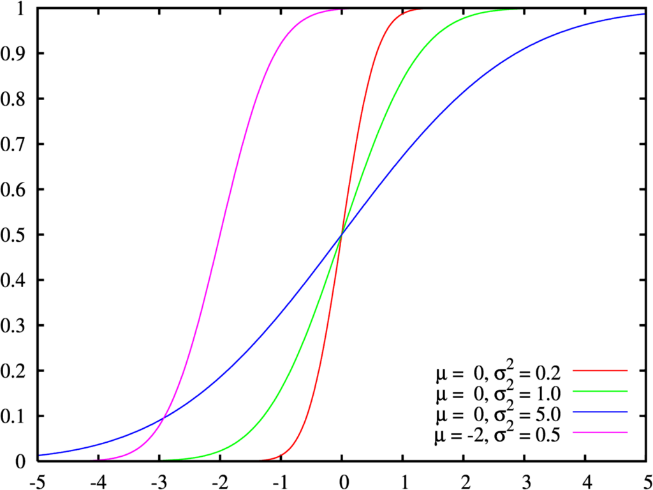
Пример. Пусть есть магазин, в который время от времени заходят покупатели. При определённых допущениях время между появлениями двух последовательных покупателей будет случайной величиной с экспоненциальным распределением. Среднее время ожидания нового покупателя (см. ниже) равно 1/ λ. Сам параметр λ тогда может быть интерпретирован как среднее число новых покупателей за единицу времени.  

**Нормальное распределение (Гауссовское)** - распределение вероятностей, которое в одномерном случае задаётся функцией плотности вероятности, совпадающей с функцией Гаусса:, где μ – **мат**. **ожидание**, **медиана** и **мода**, а σ – **среднеквадратичное** **отклонение**. **Disp** =

**Вероятность попадания**, Ф – функция Лапласа =

Если некая величина образуется в результате сложения многих случайных слабо взаимозависимых величин, каждая из которых вносит малый вклад относительно общей суммы, то центрированное и нормированное распределение такой величины при увеличении числа наблюдений стремится к нормальному распределению.

Это вытекает из центральной предельной теоремы теории вероятностей. Таких величин в окружающем нас мире очень много, поэтому такое распределение величин и названо нормальным. Нормальное распределение играет заметную роль во многих областях науки, например в математической статистике и статистической физике.

1. Особенности моделей массового обслуживания. Основные элементы модели массового обслуживания

Характерные особенности математических моделей, исследуемых в ТМО:

* Наличие некоторого потока (протяженного во времени) однородных абстрактных объектов (заявок, требований, событий). Существенными являются моменты появления этих объектов.
* Наличие некоторых правил – дисциплины обслуживания. Включает: 1)определение числа объектов, которые могут одновременно обслуживаться в системе; 2) определение числа объектов, которые могут ожидать начала обслуживания (1 и 2 образуют структуру системы); 3) определение порядка, в котором ожидающие обслуживания объекты поступают на обслуживание; 4) определение порядка, в котором объекты покидают систему и др.
* Моменты появления объектов и продолжительность обслуживания являются случайными величинами.

Математическая модель СМО должна включать:

* описание свойств входящего потока однородных событий,
* описание структуры исследуемой системы,
* описание дисциплины и характеристик процесса обслуживания.

Основные элементы модели СМО:

* Система массового обслуживания – это система, в которой выполняется последовательность (элементарных) операций. Они могут быть реальными, или фиктивными (в действительности не существуют, и нужны лишь для удобства построения модели.)
* Реальные операции выполняются приборами (каналами)обслуживания. Его количество конечно. Если прибор выполняет операцию, то он занят, в противном случае, он свободен.
* Требования на обслуживание могут быть внешними (входящими) и внутренними. **Внешнее** требование поступает извне системы в момент каждого события входящего потока требований. **Внутреннее** требование может возникать в момент окончания реальной или фиктивной операции. Множество моментов поступления в систему требований называется входным потоком данной СМО.
* При построении модели СМО (воздействия внешних факторов не включаются в модель)) вводится дополнительный объект – источник требований (заявок). Источник требований (потока требований) – это прибор, постоянно выполняющий фиктивные операции «ожидания требования». В момент окончания каждой такой операции источник посылает требование. Источник может иметь **конечную** или **бесконечную** мощность.
* Очередью называется совокупность требований, ожидающих обслуживания в момент, когда приборы заняты обслуживанием других требований. Требования, ожидающие обслуживания, находятся в накопителе. Накопитель характеризуется **емкостью** – максимальным числом требований, которые могут присутствовать в нем одновременно. Емкость может быть **конечной** или **бесконечной**.
* Дисциплина очереди – принцип, определяющий порядок, в соответствии с которым из очереди выбирается требование (заявка) для обслуживания. Наиболее известные принципы:
  + FIFO – first in, first out
  + LIFO – last in, first out
  + SIRO – service in, random out

1. Потоки событий. Однородные и неоднородные потоки. Простейший поток и его свойства

Поток событий – последовательность событий, происходящих одно за другим в некоторые моменты времени. Они бывают **однородными** и **неоднородными**.

Поток событий называется однородным, если он характеризуется только моментами поступления этих событий. Его можно задать последовательностью **моментов** **поступления**, или последовательностью **промежутков времени между событиями**.

Поток неоднородных событий -последовательность {(tn, fn)}, где tn- моменты наступления событий, fn – набор признаков события.

Если интервал времени между соседними событиями в потоке является случайной величиной, то поток называется **случайным**, в противном случае – **детерминированным**.

Поток однородных событий называется простейшим (стационарным пуассоновским потоком), если он обладает следующими тремя свойствами:

* Стационарность (среднее число событий в единицу времени постоянно);
* Отсутствие последствия (события наступают независимо друг от друга) – главное свойство простейшего потока;
* Ординарность (события происходят поодиночке).

Простейший поток характеризуется интенсивностью потока (λ) , интерпретируется как среднее число событий в единицу времени.

1. Системы массового обслуживания (СМО) с отказами, с ожиданием, смешанного типа. Типы ограничений на ожидание. Основные функциональные характеристики стационарных СМО. Обозначения типов СМО.

В СМО с отказами заявка, поступившая в систему в момент, когда все каналы обслуживания заняты, немедленно получает отказ, покидает систему и дальнейшем процессе обслуживания не участвует.

В СМО с ожиданием заявка, поступившая в систему в момент, когда все каналы обслуживания заняты, не покидает систему, а находится в очереди в состоянии ожидания обслуживания, пока не освободится какой-либо канал.

Если ожидание заявки ничем не ограничено, то такая СМО называется “**чистой СМО с ожиданием**.” Если ожидание ограничено какими-то условиями, то СМО называется “системой смешанного типа”. Для прикладных задач СМО смешанного типа представляют наибольший интерес.

**Типы ограничений на ожидание:**

* Ограничение на время ожидания в очереди;
* Ограничение на общее время пребывания заявки в системе;
* Ограничение на число заявок в очереди.

**Функциональные характеристики стационарных СМО:**

* Среднее число заявок, находящихся в СМО;
* Среднее число заявок в очереди;
* Среднее время пребывания заявки в СМО;
* Среднее время пребывания заявки в очереди;
* Среднее число занятых приборов (каналов) обслуживания;
* Коэффициенты загруженности каналов обслуживания;
* Вероятность потери заявки СМО с отказами.

**Обозначения типов СМО**

Обозначения Кендалла: A/B/m

**A** – закон распределения промежутков времени между поступлениями заявок в систему;

**B** – закон распределения времени обслуживания заявок;

**m** – число каналов обслуживания.

Добавления к обозначениям Кендалла: A/B/m/K/n

**K** – емкость накопителя, **n** – мощность (конечная или бесконечная) источника заявок.

Еще один вид записи: (A/B/m): (d/K/n)

**d-** Дисциплина очереди, **k** – максимальная емкость системы (кол-во заявок, которое может находиться в СМО)

1. Система массового обслуживания М/М/n/0. Уравнения Эрланга, система уравнений равновесия, формулы Эрланга. Определение функциональных характеристик в стационарном режиме.

Это n-канальная СМО марковского типа (обеспечивается свойствами потока заявок и потока обслуживаний (оба потока – простейшие)) с отказами.

Пусть: входной поток требований (заявок) – простейший с интенсивностью λ; поток обслуживаний – простейший с интенсивностью μ (время обслуживания распределено по показательному закону с параметром μ).

СМО имеет конечное множество состояний: Z0 – ни один канал не занят, Z1- занят один канал, Zk – занято k каналов, Zn – заняты все n каналов. В силу свойств простейшего потока вероятностью «перескока» через состояние можно пренебречь. Используя предположения о характере входного потока заявок и потока обслуживаний, а также теорему сложения вероятностей, можно показать, что вероятности pi (t) удовлетворяют соотношениям: , для любого k, 0<k<n:

,

Перенеся pk(t), 0≤k≤n, в левые части, разделив обе части равенств на τ и переходя к пределу при τ→0, получим систему дифференциальных уравнений:

Начальные условия: p0(0)=1, p1(0) = … = pn(0)=0. Эти уравнения называются уравнениями Эрланга.

Эта система может быть относительно легко проинтегрирована при любом конкретном n. Вероятности pk(t) характеризуют среднюю загрузку СМО и ее изменение с течением времени. В частности, pn(t) есть вероятность потери заявки (заявка, заставшая все каналы занятыми, получает отказ).

Величина 1-pn(t) характеризует относительную пропускную способность системы – отношение среднего числа обслуженных в единицу времени заявок к общему числу заявок на обслуживание.

**Существование стационарного режима:**

В стационарном (установившемся) режиме вероятности pi(t) = pi(не зависят от t).

Тогда . При подстановке этого условия в уравнения Эрланга получается система уравнений равновесия (СУР). Предположим, что предельные вероятности p0, p1,…,pn существует. Эти вероятности должны удовлетворять СУР и условию нормировки . СУР имеет вид:

Из первого уравнения: , из второго: . Для любого k ≤ n:

Обозначим – приведенная плотность потока заявок (среднее число заявок, приходящееся на среднее время обслуживания одной заявки), тогда , k = 1, 2, …, n.

Из условия Окончательно:

Эти формулы называются формулами Эрланга.

Таким образом: в системе M/M/n/0 при любом α (т.е при любых значениях λ и µ) существуют предельные вероятности pk (а значит, и стационарный режим), которые могут быть найдены по формулам Эрланга.

**Характеристики функционирования СМО в стационарном режиме:**

Вероятность потери заявки: – формула потерь Эрланга.

Относительная пропускная способность системы:

Среднее число заявок в системе:

Среднее время обслуживания и одновременно среднее время пребывания заявки в системе:

1. Система массового обслуживания М/М/n с ограничением на время ожидания. Система уравнений равновесия, вычисление стационарных вероятностей, функциональные характеристики в стационарном режиме

Это обобщение разобранной задачи Эрланга для СМО с отказами.

Рассмотрим смешанную n-канальную СМО при следующих условиях:

* Входной поток требований(заявок) – простейший с интенсивностью λ;
* Поток обслуживаний – простейший с интенсивностью µ;
* Заявка, заставшая все каналы занятыми, становится в очередь и ожидает обслуживания;
* Время ожидания ограничено величиной Tож, имеющей показательное распределение с параметром v.

По аналогии с параметрами λ и µ, параметр v можно интерпретировать как интенсивность “потока уходов” из очереди заявок, у которых превышено время ожидания. При v→∞ СМО смешанного типа превращается в систему с отказами. При показательном распределении величины Tож функциональные характеристики СМО не зависят от дисциплины очереди: для каждой заявки закон распределения оставшегося времени ожидания не зависит от того, сколько времени заявка уже стояла в очереди.

Возможные состояния системы:

Z0 – ни один канал не занят (очереди нет)

Z1 –занят ровно один канал (очереди нет)

…

Zn –заняты все n каналов (очереди нет)

Zn+1 –заняты все n каналов, одна заявка стоит в очереди

…

Zn+s – заняты все n каналов, s заявок стоит в очереди.

Нумерация состояний – по числу заявок, находящихся в системе.

Система дифференциальных уравнений, связывающая вероятности pi(t), в данном случае будет иметь бесконечное число уравнений. Первые n уравнений – это соответствующие уравнения Эрланга.

Остальные уравнения системы имеют вид:

В итоге, система уравнений:

Эти уравнения являются обобщениями уравнений Эрланга на случай СМО смешанного типа с ограниченным временем ожидания. Предположим, что существуют предельные вероятности p0, p1,…, pn,… Эти вероятности должны удовлетворять СУР и условию нормировки: .

СУР получается подстановкой условия в систему сверху:

Из первых n+1 уравнений получим: для любого k≤n . При k=n + s, s = 1, 2,…:

Итог: для любого S≥1

Вероятность p0, как и ранее, определим из условия: :

Для упрощения полученных выражений обозначим: – приведенные плотности потока заявок и ухода заявок, стоящих в очереди. Интерпретация: α – среднее число заявок, приходящееся на среднее время обслуживания одной заявки; β – среднее число уходов заявок из очереди, приходящееся на средне время обслуживания одной заявки.

Тогда: где p0=

После подстановки pk в pn+s окончательно получаем: